

Seminar Logik, Komplexität, Spiele: Fixpunktlogiken

Fixpunktlogik mit Zählquantoren

Florian Weingarten

Betreuer:

Dipl.-Inform.

Roman Rabinovich

Lehr und Forschungsgebiet

Mathematische Grundlagen der Informatik

Prof. Dr. Erich Grädel

RWTH Aachen

Aachen, 17. Juli 2009

Fixpunktlogik mit Zählquantoren

Inhalt

- 1 Einführung
 - Motivation: Logiken für Komplexitätsklassen
 - Wiederholung
 - Logiken mit Zählquantoren
- 2 IFP+C und P_{TIME}
 - Die Logik \mathcal{C}_k
 - Das \mathcal{C}_k -Spiel
 - Konstruktion von Cai-Fürer-Immerman
 - Folgerungen: IFP+C erfasst P_{TIME} nicht
- 3 Zusammenfassung und Ausblick

Motivation

Definition

Logik L *erfasst* Komplexitätsklasse C , wenn

- für alle $\psi \in L$, das Model-Checking-Problem für ψ in C ist und
- für alle $\mathcal{K} \in C$, ein $\psi \in L$ existiert mit $\text{Mod}(\psi) = \mathcal{K}$.

Motivation

Definition

Logik L *erfasst* Komplexitätsklasse C , wenn

- für alle $\psi \in L$, das Model-Checking-Problem für ψ in C ist und
- für alle $\mathcal{K} \in C$, ein $\psi \in L$ existiert mit $\text{Mod}(\psi) = \mathcal{K}$.

Beispiel

- MSO erfasst über Wortstrukturen die regulären Sprachen (Satz von Büchi, Elgot, Trahtenbrot).
- ESO erfasst über endlichen Strukturen NP (Satz von Fagin).

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst P_{TIME} auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst P_{TIME} auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Frage

Gibt es eine Logik, die P_{TIME} auf **allen** (endlichen) Strukturen erfasst?

Motivation

Satz (Immerman, Vardi)

Die Logik IFP erfasst P_{TIME} auf geordneten (endlichen) Strukturen.

Frage

Gibt es eine Logik, die P_{TIME} auf **allen** (endlichen) Strukturen erfasst?

Falls...

- ja, dann kann diese nicht stärker als ESO sein.
- nein, dann ist P_{TIME} ≠ NP.

Motivation

FO ist zu schwach, um P_{TIME} zu erfassen.

Motivation

FO ist zu schwach, um PTIME zu erfassen.

Beispiel

Zwei in Polynomialzeit entscheidbare Eigenschaften:

- (1) Ist ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ zusammenhängend? (Tiefensuche)
- (2) Hat das Universum A einer Struktur \mathfrak{A} eine gerade Anzahl von Elementen?

Beide sind nicht in FO ausdrückbar (Beweis z.B. über Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele).

Motivation

FO ist zu schwach, um PTIME zu erfassen.

Beispiel

Zwei in Polynomialzeit entscheidbare Eigenschaften:

(1) Ist ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ zusammenhängend? (Tiefensuche)

(2) Hat das Universum A einer Struktur \mathfrak{A} eine gerade Anzahl von Elementen?

Beide sind nicht in FO ausdrückbar (Beweis z.B. über Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele).

Idee

Erweitere FO um

(1) Rekursion (IFP) und

(2) Zählkonstrukte (FO+C, IFP+C).

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \bar{x})$ induziert **inflationären** Operator:

$$F_\psi : \mathcal{P}(A^k) \rightarrow \mathcal{P}(A^k)$$

$$R \mapsto R \cup \{\bar{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \bar{a})\}.$$

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \bar{x})$ induziert **inflationären** Operator:

$$F_\psi : \mathcal{P}(A^k) \rightarrow \mathcal{P}(A^k)$$

$$R \mapsto R \cup \{\bar{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \bar{a})\}.$$

- Folge $(F_\psi^k(\emptyset))_{k \in \mathbb{N}}$ wird stationär, d.h. Fixpunkt existiert (IFP)
- $\mathfrak{A} \models [\text{ifp } R\bar{x}.\psi](\bar{t}) \Leftrightarrow \bar{t}^{\mathfrak{A}} \in \text{IFP}(F_\psi)$.

Inflationäre Fixpunktlogik

- LFP: Relationsvariable muss *positiv* auftreten
- $\psi(X, \bar{x})$ induziert **inflationären** Operator:

$$F_\psi : \mathcal{P}(A^k) \rightarrow \mathcal{P}(A^k)$$

$$R \mapsto R \cup \{\bar{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \psi(R, \bar{a})\}.$$

- Folge $(F_\psi^k(\emptyset))_{k \in \mathbb{N}}$ wird stationär, d.h. Fixpunkt existiert (IFP)
- $\mathfrak{A} \models [\text{ifp } R\bar{x}.\psi](\bar{t}) \Leftrightarrow \bar{t}^{\mathfrak{A}} \in \text{IFP}(F_\psi)$.

Beispiel

$$\psi(u, v) := [\text{ifp } Txy.((x = y) \vee \exists z(Exz \wedge Tzy))](u, v)$$

Zählen

Erweitere Strukturen um *Zahlen*.

Zählen

Erweitere Strukturen um *Zahlen*.

Definition

Sei $\mathfrak{A} = (A, (R_i)_{i \in I})$, $|A| = n$.

$$\mathfrak{A}^* := \underbrace{(A, (R_i)_{i \in I})}_{\text{Punkte}} \cup \underbrace{(\{0, 1, \dots, n\}, \leq, \text{min}, \text{max})}_{\text{Zahlen}}.$$

Inflationäre Fixpunktlogik mit Zählquantoren (IFP+C)

- Terme über τ (mit Variablen x, y, z, \dots).
- Terme über $\{\leq, \min, \max\}$ (mit Variablen μ, λ, ν, \dots).
- Atomare τ -Formeln und atomare $\{\leq, \min, \max\}$ -Formeln.
- $Xt_1 \dots t_k \rho_1 \dots \rho_l$, wobei X Relationsvariable der Stelligkeit (k, l) .
- φ, ψ Formeln, dann sind $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ und $\varphi \vee \psi$ Formeln.
- φ Formel, dann sind $\exists x\varphi$ und $\exists\mu\varphi$ Formeln.
- φ Formel, μ Variable, dann ist $\exists^{\geq\mu}x\varphi(x)$ Formel.
- $\varphi(X, \bar{x}, \bar{\mu})$ Formel, dann auch $[\text{ifp } \bar{x}\bar{\mu}.\varphi](\bar{t}, \bar{\rho})$.

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\text{ifp } X\mu. \underbrace{((\mu = \min) \vee \exists \nu (X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X, \mu)}](\max)$$

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\text{ifp } X\mu. \underbrace{((\mu = \min) \vee \exists \nu (X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X,\mu)}](\text{max})$$

Fixpunktiteration:

- $F_\varphi(R) = \{ i \mid i = 0 \text{ oder } i = j + 2 \text{ für ein } j \in R \}$
- $F_\varphi^1(\emptyset) = \{0\}$
- $F_\varphi^2(\emptyset) = \{0, 2\}$
- $F_\varphi^3(\emptyset) = \{0, 2, 4\}$
- ...
- $F_\varphi^k(\emptyset) = \{ i \mid i \leq 2k \text{ und } i \text{ ist gerade} \}$

Beispiel IFP+C

Beispiel

$$\psi := [\text{ifp } X\mu. \underbrace{((\mu = \min) \vee \exists \nu (X\nu \wedge \mu = \nu + 2))}_{=:\varphi(X,\mu)}](\max)$$

Fixpunktiteration:

- $F_\varphi(R) = \{ i \mid i = 0 \text{ oder } i = j + 2 \text{ für ein } j \in R \}$
- $F_\varphi^1(\emptyset) = \{0\}$
- $F_\varphi^2(\emptyset) = \{0, 2\}$
- $F_\varphi^3(\emptyset) = \{0, 2, 4\}$
- ...
- $F_\varphi^k(\emptyset) = \{ i \mid i \leq 2k \text{ und } i \text{ ist gerade} \}$

Insgesamt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff \max^{\mathfrak{A}*} \in \text{IFP}(F_\varphi) \iff |A| \text{ gerade}$$

Ziel

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

IFP+C erfasst P_{TIME} nicht.

Ziel

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

IFP+C erfasst PTIME nicht.

Beweisüberblick

- Neue Logik \mathcal{C}_k .
- Spieltheoretische Semantik für \mathcal{C}_k .
- Konstruiere Graphen \mathcal{G}_k und \mathcal{H}_k , so dass
 - \mathcal{G}_k und \mathcal{H}_k sich in Polynomialzeit unterscheiden lassen und
 - \mathcal{G}_k und \mathcal{H}_k sich durch \mathcal{C}_k -Formeln **nicht** unterscheiden lassen.
- Folgerung: IFP+C erfasst PTIME nicht.

Logik \mathcal{C}_k

Definition

Wie FO, nur

- maximal k Variablen.
- neue Quantoren: $\exists^{\geq i} x \varphi(x)$ (für jedes $i \in \mathbb{N}$).

Logik \mathcal{C}_k

Definition

Wie FO, nur

- maximal k Variablen.
- neue Quantoren: $\exists^{\geq i} x \varphi(x)$ (für jedes $i \in \mathbb{N}$).

Beobachtung

- $\mathcal{C}_k < \text{FO}$.
- Aber: Man braucht mehr Variablen!
- Beispiel: $\exists^{\geq 2} x \varphi(x)$ äquivalent zu $\exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2))$.

Das C_k -Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} = (V_{\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}})$ (mit $V_{\mathcal{G}} \cap V_{\mathcal{H}} = \emptyset$).

Das \mathcal{C}_k -Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} = (V_{\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}})$ (mit $V_{\mathcal{G}} \cap V_{\mathcal{H}} = \emptyset$).

Definition (\mathcal{C}_k -Spiel)

Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i .

- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_{\mathcal{G}}$ oder $V_{\mathcal{H}}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B .
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A .

Das \mathcal{C}_k -Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} = (V_{\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}})$ (mit $V_{\mathcal{G}} \cap V_{\mathcal{H}} = \emptyset$).

Definition (\mathcal{C}_k -Spiel)

Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i .

- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_{\mathcal{G}}$ oder $V_{\mathcal{H}}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B .
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A .

Definition (Spielkonfiguration, Gewinnbedingung)

- Zwei partielle Funktionen u, v .
- $u(x_i) = g$: Auf dem Knoten g im Graphen \mathcal{G} liegt ein Stein x_i .

Das \mathcal{C}_k -Spiel

Sei $\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ und $\mathcal{H} = (V_{\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}})$ (mit $V_{\mathcal{G}} \cap V_{\mathcal{H}} = \emptyset$).

Definition (\mathcal{C}_k -Spiel)

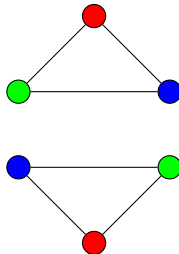
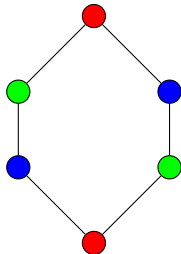
Es gibt zwei Spieler (I und II) und für jedes $1 \leq i \leq k$ zwei Spielsteine x_i .

- Spieler I wählt einen Stein x_i und (danach!) eine Teilmenge A von $V_{\mathcal{G}}$ oder $V_{\mathcal{H}}$.
- Spieler II wählt eine Menge B im anderen Graphen mit $|A| = |B|$.
- Spieler I platziert seinen Stein x_i auf einem Knoten aus B .
- Spieler II platziert den zweiten Stein x_i auf einem Knoten aus A .

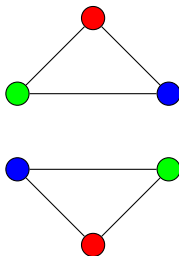
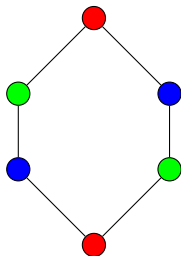
Definition (Spielkonfiguration, Gewinnbedingung)

- Zwei partielle Funktionen u, v .
- $u(x_i) = g$: Auf dem Knoten g im Graphen \mathcal{G} liegt ein Stein x_i .
- I gewinnt, wenn $u(x_i) \mapsto v(x_i)$ kein Isomorphismus ist (oder wenn II kein B findet).
- „Spieler I will die Graphen unterscheiden, Spieler II will sie gleich aussehen lassen.“

Beispiel zum C_k -Spiel



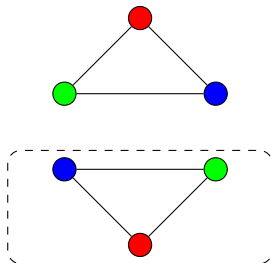
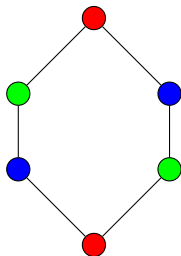
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.

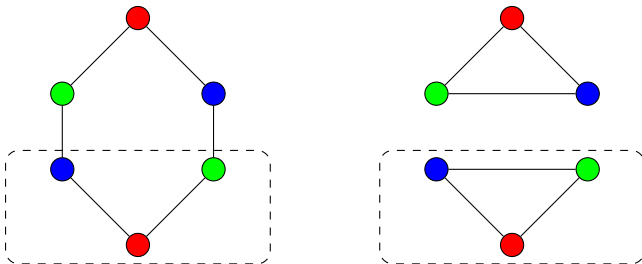
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .

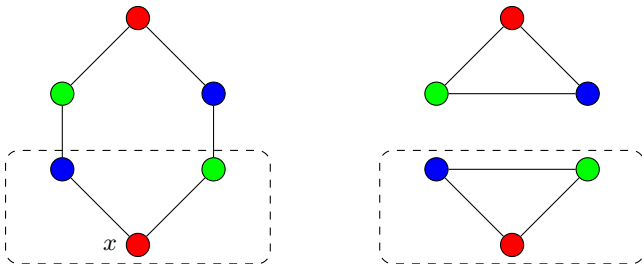
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

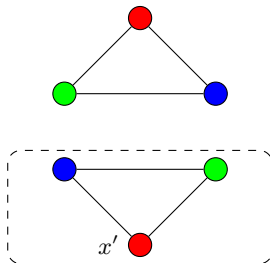
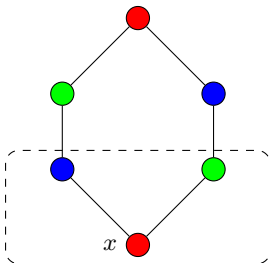
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

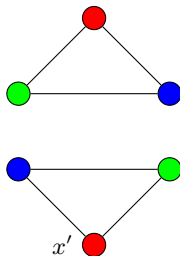
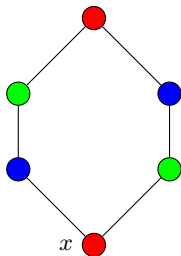
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

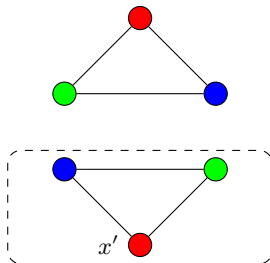
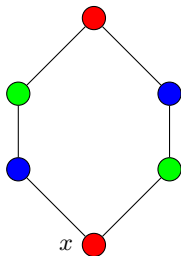
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

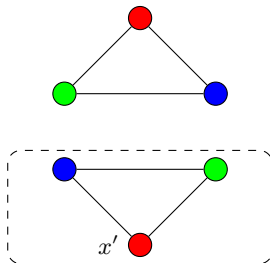
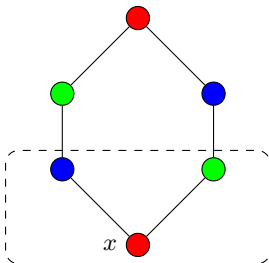
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

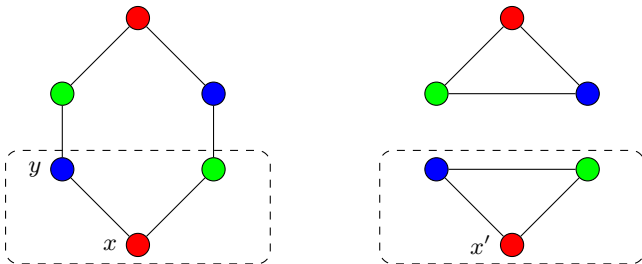
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

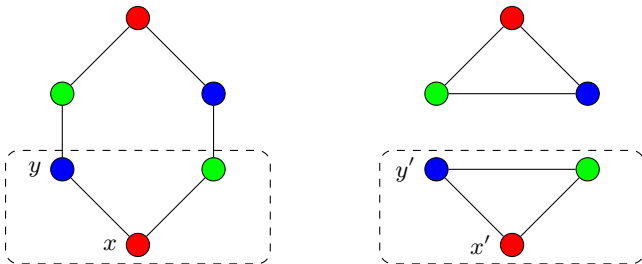
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

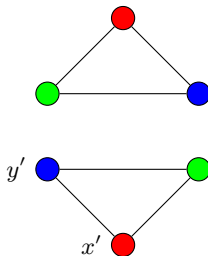
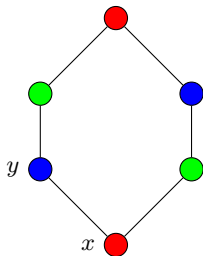
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

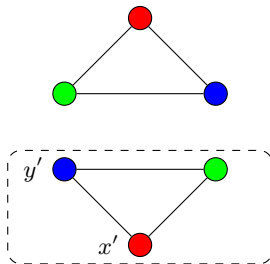
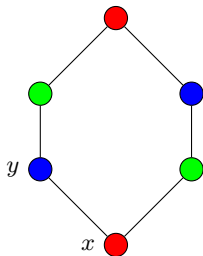
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

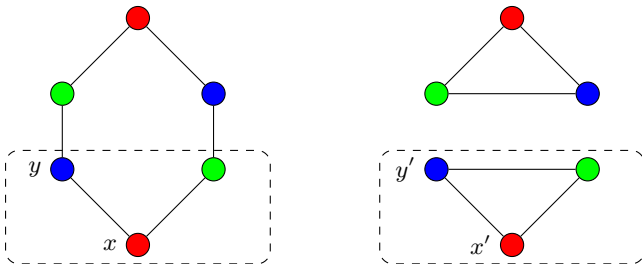
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

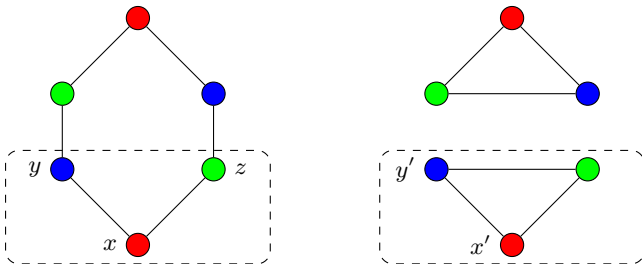
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

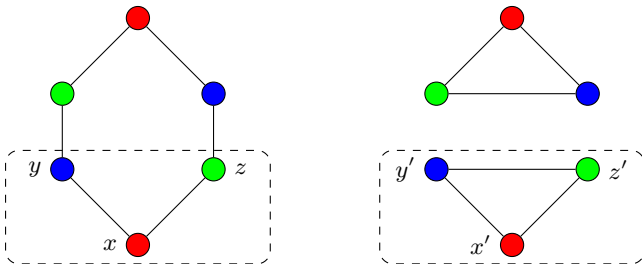
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

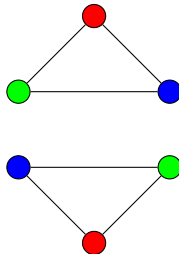
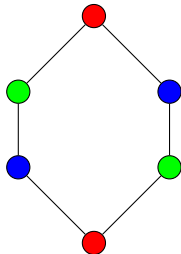
- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.

Beispiel zum C_k -Spiel



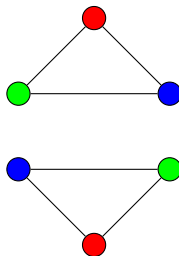
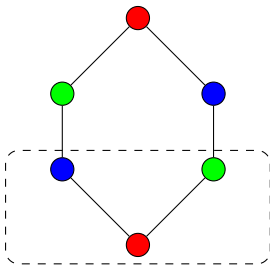
Spieler I gewinnt das C_3 -Spiel:

- Idee: $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$.
- Wähle Dreieck als Menge A .
- Spieler II muss mit gleicher Farbe antworten.
- **Kein Isomorphismus!**

Beispiel zum C_k -Spiel

Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

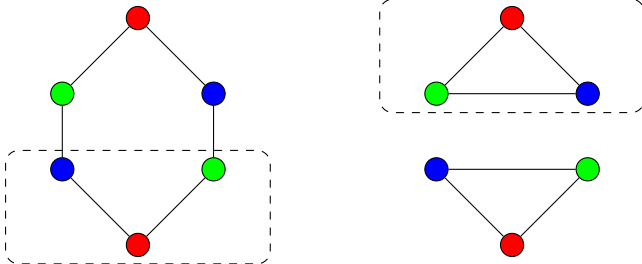
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.

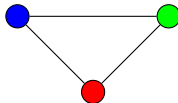
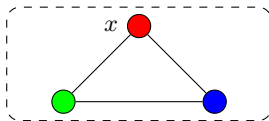
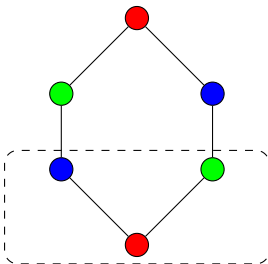
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.

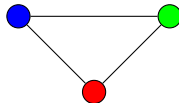
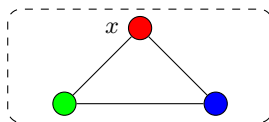
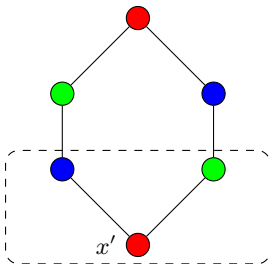
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .

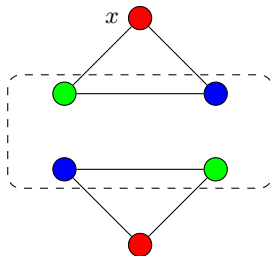
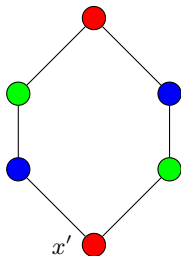
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

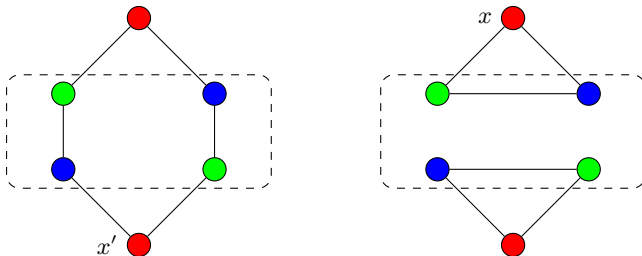
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

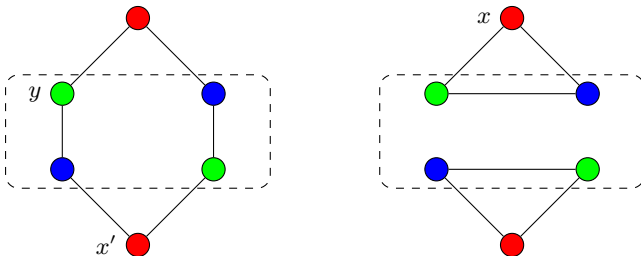
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

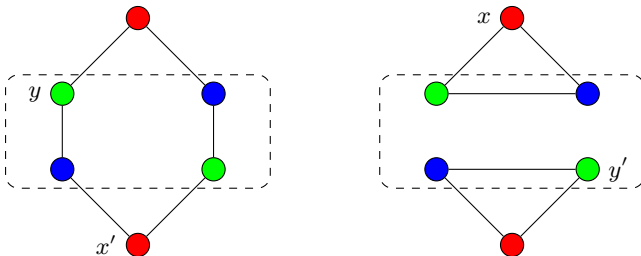
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

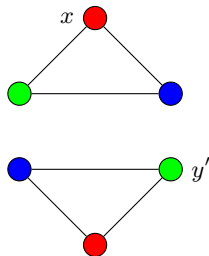
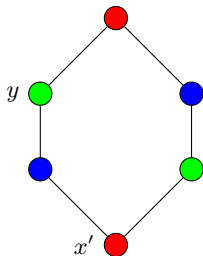
- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.

Beispiel zum C_k -Spiel

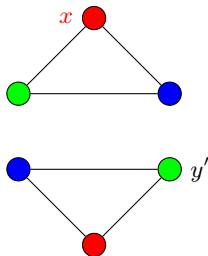
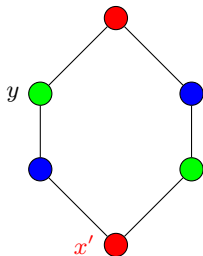


Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I wählt A , II wählt B mit gleichen Farben.
- Spieler I wählt x .
- Spieler II antwortet mit x' mit gleicher Farbe.
- Spieler II kann immer antworten, egal ob Exy oder nicht.

Beispiel zum C_k -SpielSpieler II gewinnt das C_2 -Spiel

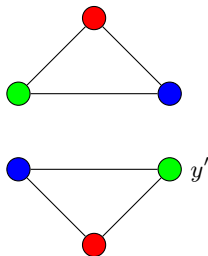
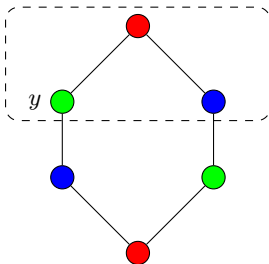
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.

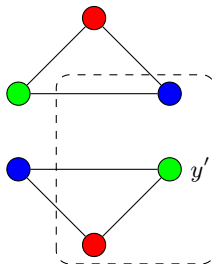
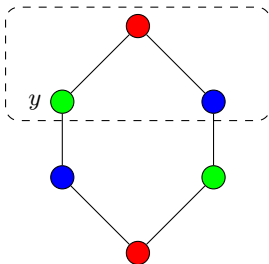
Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.
- **Danach** wird erst das neue A gewählt.

Beispiel zum C_k -Spiel



Spieler II gewinnt das C_2 -Spiel

- Spieler I muss Stein wählen, den er erneut benutzen möchte.
- **Danach** wird erst das neue A gewählt.
- Spieler II kann B so wählen, dass Spieler I die Graphen nicht unterscheiden kann.

Das \mathcal{C}_k -Spiel

Satz

Spieler II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das \mathcal{C}_k -Spiel auf \mathcal{G} und \mathcal{H} , wenn sich \mathcal{G} und \mathcal{H} durch \mathcal{C}_k -Formeln **nicht** unterscheiden lassen.

Das \mathcal{C}_k -Spiel

Satz

Spieler II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das \mathcal{C}_k -Spiel auf \mathcal{G} und \mathcal{H} , wenn sich \mathcal{G} und \mathcal{H} durch \mathcal{C}_k -Formeln **nicht** unterscheiden lassen.

Beweis („ \Rightarrow “)

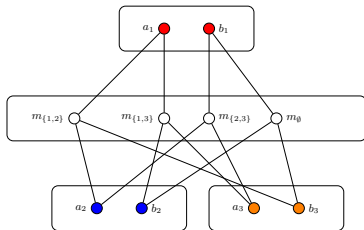
- Angenommen $\varphi \in \mathcal{C}_k$ unterscheidet \mathcal{G} und \mathcal{H} .
- $m :=$ Quantorenrang von φ .
- Interessanter Fall: $\varphi = \exists^{\geq N} x_i \psi$.
- Spieler I wählt x_i und $|A| = N$ in \mathcal{G} , so dass ψ für alle $v \in A$ gilt.
- Spieler II wählt $|B| = N$.
- In \mathcal{H} gilt ψ für $\leq N - 1$ viele Knoten.
- Spieler I legt Stein auf ein Element aus B , für das ψ nicht gilt.
- \mathcal{G} und \mathcal{H} unterscheiden sich nun schon durch ψ .
- Quantorenrang von ψ ist $m - 1$.
- Per Induktion: Spieler II verliert!

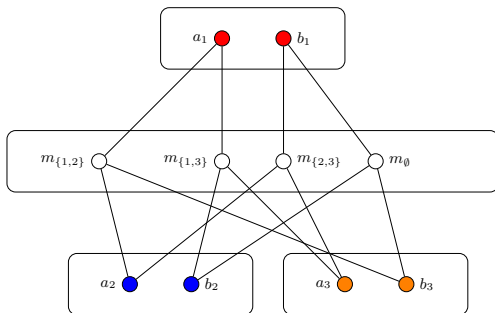
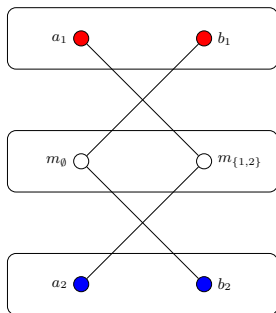
\mathcal{X}_k

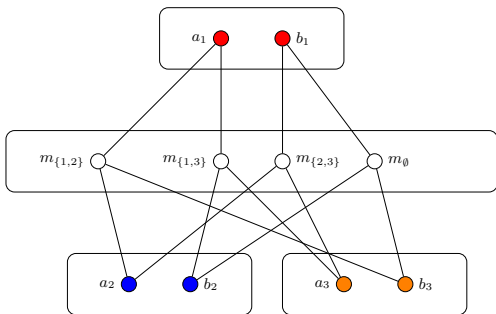
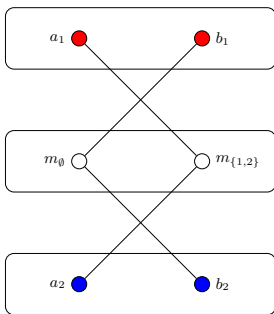
Definition

Sei $\mathcal{X}_k := (V_k, E_k)$ mit

- $V_k := A_k \cup B_k \cup M_k$
- $A_k := \{a_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
- $B_k := \{b_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
- $M_k := \{m_S \mid S \subseteq \{1, \dots, k\}, |S| \text{ gerade}\}$
- $E_k := \{(m_S, a_i) \mid m_S \in M_k, i \in S\}$
 $\cup \{(m_S, b_i) \mid m_S \in M_k, i \notin S\}$
- a_i und b_i seien mit der Farbe i gefärbt.
- Knoten in M_k haben alle die gleiche Farbe.



Beispiel: \mathcal{X}_2 und \mathcal{X}_3 

Beispiel: \mathcal{X}_2 und \mathcal{X}_3 

Beobachtung

- $|M_k| = 2^{k-1}$.
- m_S sind für jedes $1 \leq i \leq k$ entweder mit a_i oder mit b_i verbunden.
- m_S haben alle Grad k .

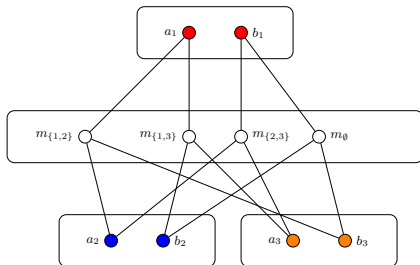
Automorphismen von \mathcal{X}_k

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Automorphismen von \mathcal{X}_k

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

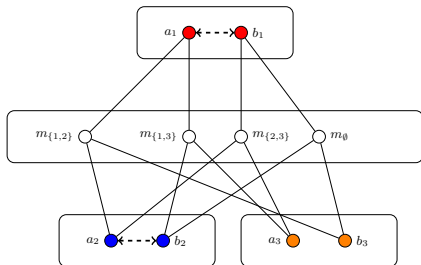


Dann **muß** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_\emptyset$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von \mathcal{X}_k

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist *gerade*.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

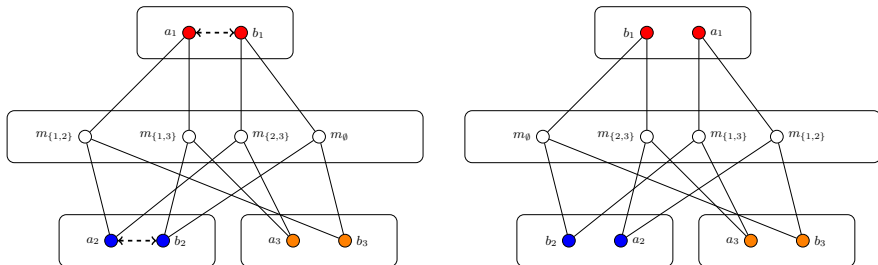


Dann **muß** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_{\emptyset}$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von \mathcal{X}_k

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist gerade.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)

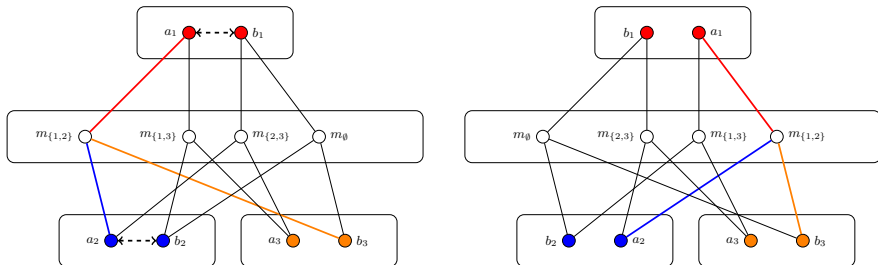


Dann **muß** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_{\emptyset}$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

Automorphismen von \mathcal{X}_k

- $\{a_i, b_i\}$ werden fest gelassen.
- Anzahl $a_i \leftrightarrow b_i$ ist gerade.
- Umgekehrt: Permutation von gerade vielen $a_i \leftrightarrow b_i$ induziert Automorphismus.

Beispiel (Tausche a_1 mit b_1 und a_2 mit b_2)



Dann **muß** bereits $m_{\{1,2\}} \mapsto m_{\emptyset}$ und $m_{\{1,3\}} \mapsto m_{\{2,3\}}$ gelten.

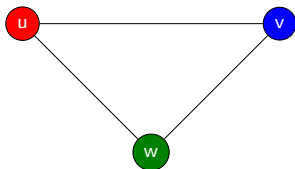
Automorphismen von \mathcal{X}_k

Also:

- Jeder Automorphismus *entspricht* einer Permutation auf $A_k \cup B_k$, die alle $\{a_i, b_i\}$ fest lässt und geradzahlig viele a_i mit b_i tauscht.
- Jeder Automorphismus kann durch ein $m_S \in M_k$ *kodiert* werden.

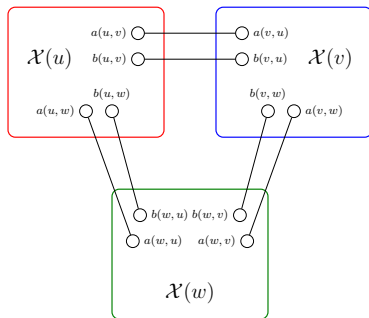
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

Sei \mathcal{G} ein endlicher, zusammenhängender ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten mindestens Grad 2 hat.



\mathcal{G}

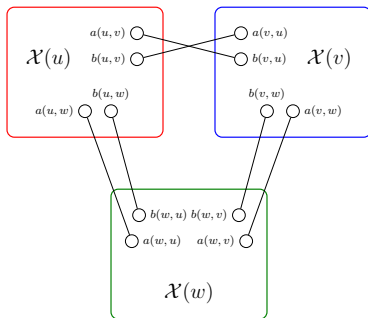
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



$\mathcal{X}(\mathcal{G})$

- Ersetze jeden Knoten v mit Grad k durch eine Kopie von \mathcal{X}_k (genannt $\mathcal{X}(v)$).
- Ordne jeder Kante (v, w) in \mathcal{G} ein Paar $\{a_i, b_i\} =: \{a(v, w), b(v, w)\}$ zu.
- Knoten in $\mathcal{X}(v)$ bekommen Farbe von v .

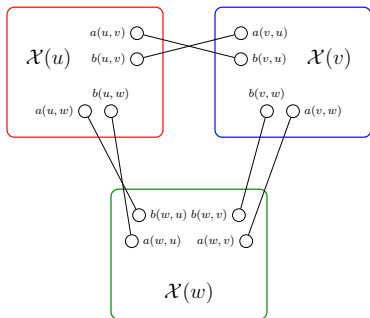
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



$\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

- Verdrehe genau eine Kante in $\mathcal{X}(\mathcal{G})$.

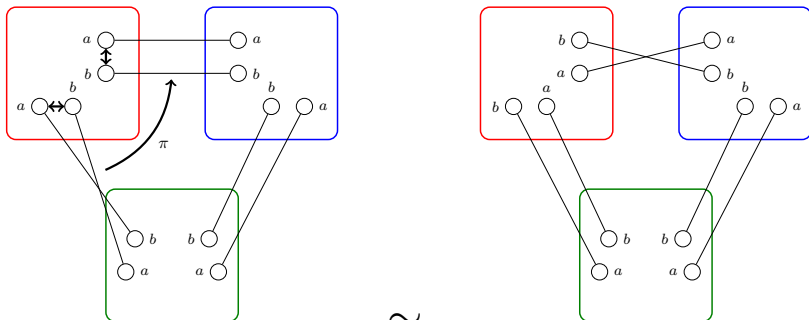
Graphen $\mathcal{X}(\mathcal{G})$, $\tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$ und $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$



$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

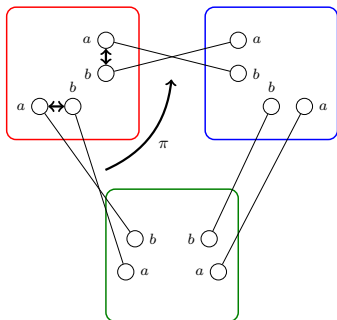
- Verdrehe mehrere Kanten in $\mathcal{X}(\mathcal{G})$.

Verschieben der Verdrehungen

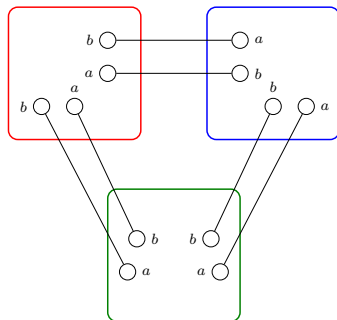


112

Verschieben der Verdrehungen

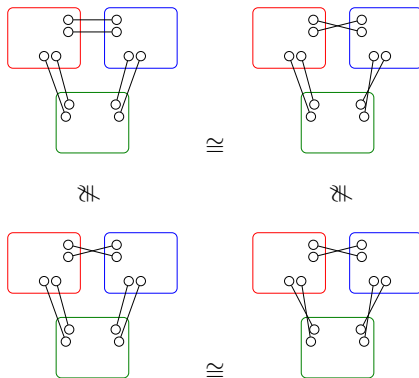


112



Isomorphieklassen von $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G})$

$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{G}) \cong \begin{cases} \mathcal{X}(\mathcal{G}) & t \text{ gerade} \\ \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{G}) & t \text{ ungerade} \end{cases}$$



Position unwichtig, da Verdrehungen „verschoben“ werden können. Nur Parität relevant.

Graphseparatoren

Definition

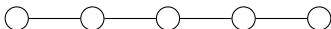
Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

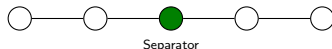


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

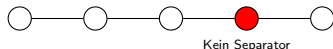


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel

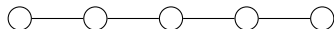


Graphseparatoren

Definition

Ein *Separator* eines Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ ist eine Menge $S \subseteq V$, so dass in $\mathcal{G} \setminus S$ für alle Zusammenhangskomponente C gilt: $|C| \leq \frac{|V|}{2}$.

Beispiel



Ununterscheidbarkeit durch \mathcal{C}_k

Satz (Cai, Fürer, Immerman)

Sei \mathcal{T} ein Graph, so dass jeder Separator mindestens $s + 1$ Knoten hat, dann gilt

$$\mathcal{X}(\mathcal{T}) \equiv_{\mathcal{C}_s} \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T}).$$

D.h. es gibt keine \mathcal{C}_s -Formel, die die beiden Graphen unterscheidet.

Gewinnstrategie für Spieler II im \mathcal{C}_s -Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

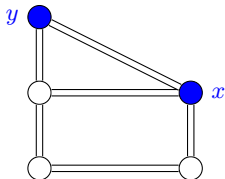
- $P_r := \{ g \in V_{\mathcal{T}} \mid \text{in } \mathcal{X}(g) \text{ liegt nach } r \text{ Zügen ein Stein} \}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

Gewinnstrategie für Spieler II im \mathcal{C}_s -Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{ g \in V_{\mathcal{T}} \mid \text{in } \mathcal{X}(g) \text{ liegt nach } r \text{ Zügen ein Stein} \}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

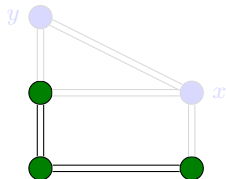


Gewinnstrategie für Spieler II im \mathcal{C}_s -Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{ g \in V_{\mathcal{T}} \mid \text{in } \mathcal{X}(g) \text{ liegt nach } r \text{ Zügen ein Stein} \}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

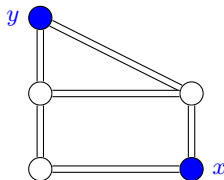
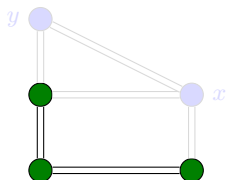


Gewinnstrategie für Spieler II im \mathcal{C}_s -Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{ g \in V_{\mathcal{T}} \mid \text{in } \mathcal{X}(g) \text{ liegt nach } r \text{ Zügen ein Stein} \}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.

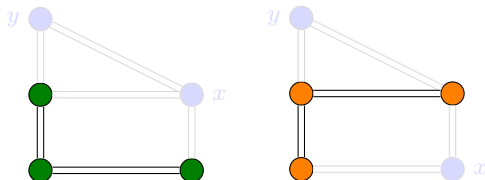


Gewinnstrategie für Spieler II im \mathcal{C}_s -Spiel

Spieler I versucht die Verdrehung aufzuzeigen, Spieler II versucht sie zu verstecken.

Definitionen und Vorüberlegungen

- $P_r := \{ g \in V_{\mathcal{T}} \mid \text{in } \mathcal{X}(g) \text{ liegt nach } r \text{ Zügen ein Stein} \}$.
- $|P_r| \leq s$, also kann P_r kein Separator sein.
- $Q_r :=$ größte Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T} \setminus P_r$.
- Q_r enthält mehr als die Hälfte der Knoten.
- $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) := \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$ mit Verdrehung an einer zu $g \in Q_r$ adjazenten Kante.
- $Q_r \cap Q_{r+1} \neq \emptyset$.



Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

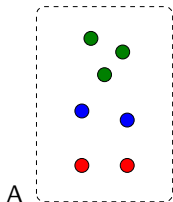
Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfabige Mengen A zu wählen.

Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.

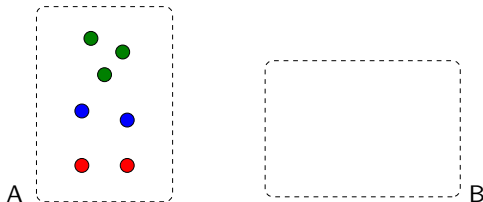


Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

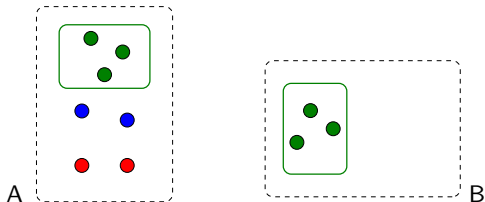


Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

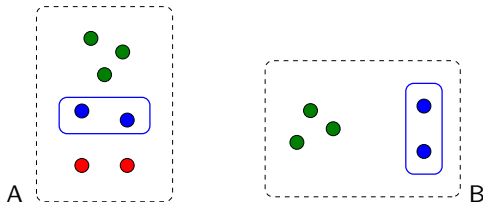


Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

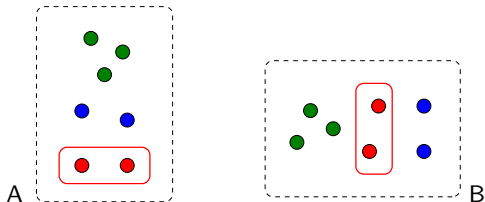


Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.

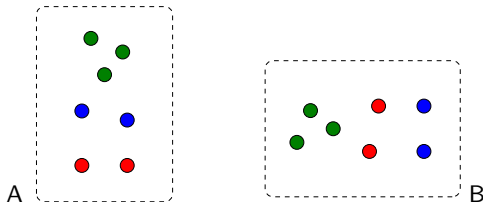


Züge von Spieler I im C_s -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

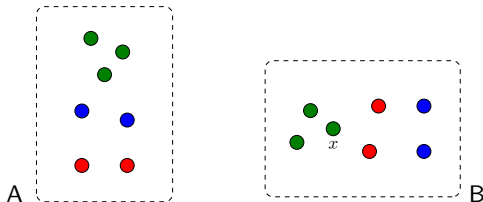


Züge von Spieler I im C_s -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

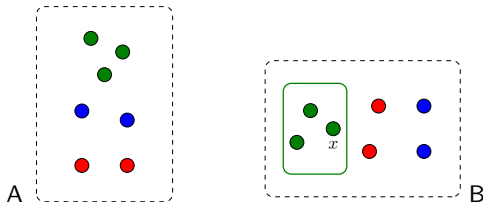


Züge von Spieler I im C_s -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

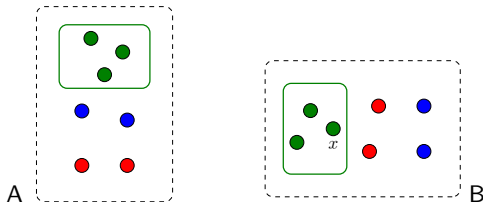


Züge von Spieler I im C_s -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.

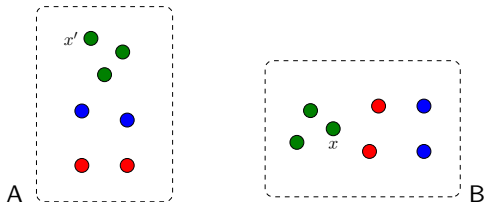


Züge von Spieler I im C_S -Spiel

Beobachtung

Es bringt Spieler I keinen Vorteil, mehrfarbige Mengen A zu wählen.

- I verliert einfarbig \Rightarrow I verliert auch mehrfarbig.
- II wählt sein B für jede Farbe von A separat nach seiner einfarbigen Strategie.
- Kann Spieler II nicht gleichviele Elemente finden für eine Farbe, so hätte Spieler I alleine mit dieser Farbe schon gewinnen können.



Züge von Spieler I im \mathcal{C}_S -Spiel

Erinnerung:

- In $\mathcal{X}(v)$: a_i und b_i haben Farbe i , Knoten in $M(v)$ alle gleich gefärbt.
- Jedes v hat in \mathcal{T} eine eindeutige Farbe.
- Jeder Knoten von $\mathcal{X}(v)$ hat zweite Farbe (die von v).

Also: Spieler I wählt nur $A \subseteq \{a_i, b_i\}$ oder $A \subseteq M(v)$ in einem $\mathcal{X}(v)$.

Züge von Spieler I im \mathcal{C}_S -Spiel

Erinnerung:

- In $\mathcal{X}(v)$: a_i und b_i haben Farbe i , Knoten in $M(v)$ alle gleich gefärbt.
- Jedes v hat in \mathcal{T} eine eindeutige Farbe.
- Jeder Knoten von $\mathcal{X}(v)$ hat zweite Farbe (die von v).

Also: Spieler I wählt nur $A \subseteq \{a_i, b_i\}$ oder $A \subseteq M(v)$ in einem $\mathcal{X}(v)$.

Ausserdem:

Element aus der Mitte $M(v)$ eines $\mathcal{X}(v)$ legt bereits alle anderen fest. Daher:

- Spieler I wählt in jedem Zug nur in der Mitte ($A \subseteq M(v)$).
- Spieler I wählt in jedem Zug nur *ein einziges Element* ($A = \{m_S\}$)
(d.h. **Zählen hilft Spieler I nicht!**).

Gewinnbedingung

Spieler II gewinnt, falls er folgende Bedingung aufrechterhalten kann:

(*) Für alle $g \in Q_r$ gibt es (nach r Zügen) ein

$$\alpha_{r,g} : \tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$$

welches die Platzierung der Steine respektiert.

Gewinnbedingung

Spieler II gewinnt, falls er folgende Bedingung aufrechterhalten kann:

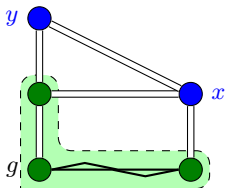
(*) Für alle $g \in Q_r$ gibt es (nach r Zügen) ein

$$\alpha_{r,g} : \tilde{\mathcal{X}}^g(T) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{X}}(T)$$

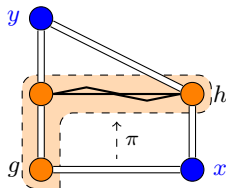
welches die Platzierung der Steine respektiert.

Anschaulich

Spieler II gewinnt, weil er die verdrehte Kante in Q_r *verstecken* kann. Funktioniert, weil die „steinfreien Komponenten“ Q_r und Q_{r+1} sich überschneiden.



nach r Zügen

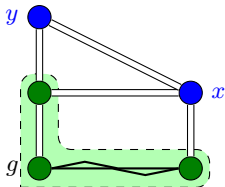


nach $r + 1$ Zügen

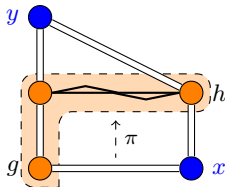
Induktion

Induktion über Anzahl der Züge

- Nach $r = 0$ Zügen
 - Noch keine Steine platziert.
 - Also $Q_0 = \mathcal{T}$.
 - $\tilde{\mathcal{X}}^g(\mathcal{T}) \cong \tilde{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$.



nach r Zügen

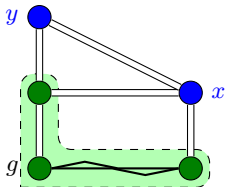


nach $r + 1$ Zügen

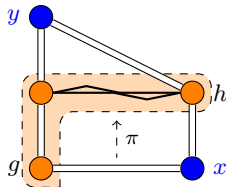
Induktion

Angenommen (*) gilt nach r Zügen.

- Spieler I legt in Zug $r + 1$ einen Stein auf Knoten in $M(w)$.
- Sei $g \in Q_r \cap Q_{r+1}$.
- Q_{r+1} ist zusammenhängend: Es gibt Pfad von g zu jedem $h \in Q_{r+1}$.
- $\alpha_{r+1,h} := \pi \circ \alpha_{r,g}$.
- Pfad von g nach h ist „steinfrei“.
- Also: π lässt Knoten fest, auf denen Steine liegen.
- $\alpha_{r+1,h}$ erfüllt Bedingung (*) \Rightarrow Spieler II gewinnt.



nach r Zügen



nach $r + 1$ Zügen

Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

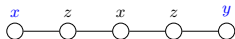
- Angenommen $\varphi \in \text{IFP+C}$ (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \text{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Folgerungen: IFP+C erfasst PTIME nicht

Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

- Angenommen $\varphi \in \text{IFP+C}$ (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \text{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Beispiel zum „Abwickeln“



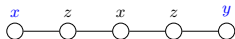
- $[\text{ifp}Xxy.(x = y \vee \exists z(Exz \wedge Xzy))](x, y)$
- $\rightsquigarrow x = y \vee \exists z(Exz \wedge (Ezy \vee \exists x(Ezx \wedge (Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezy))))))$
- Beide Formeln für $|\mathcal{G}| \leq 5$ äquivalent.

Folgerungen: IFP+C erfasst PTIME nicht

Folgerung: IFP+C kann die Graphen auch nicht entscheiden

- Angenommen $\varphi \in \text{IFP+C}$ (mit k Variablen) kann die Graphen unterscheiden.
- Gebe Formel $\varphi_n \in \text{FO}$ an, die für Graphen der Größe $\leq n$ äquivalent zu φ ist.
- Fixpunkte „abwickeln“.

Beispiel zum „Abwickeln“



- $[\text{ifp}Xxy.(x = y \vee \exists z(Exz \wedge Xzy))](x, y)$
- $\rightsquigarrow x = y \vee \exists z(Exz \wedge (Ezy \vee \exists x(Ezx \wedge (Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezy))))))$
- Beide Formeln für $|\mathcal{G}| \leq 5$ äquivalent.
- $\exists \mu$ durch $\bigvee_{i=0}^n$ ausdrücken, z.B.

$$\exists \mu \exists^{\geq \mu} x \varphi(x) \rightsquigarrow \bigvee_{i=0}^n \exists^{\geq i} x \varphi(x)$$

- Keine neuen Variablen dazu gekommen.
- Also: $\varphi_n \in \mathcal{C}_k$ unterscheidet die Graphen auch. **Widerspruch.**



Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um P_{TIME} zu erfassen.

Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um P_{TIME} zu erfassen.

Offene Fragen

- Welche Logik erfasst P_{TIME} (auf der Klasse aller endlichen Strukturen)?
- Gibt es so eine Logik überhaupt?

Zusammenfassung

- FO+C und IFP+C sind Erweiterungen von FO bzw. IFP um *Zählquantoren*.
- IFP+C reicht nicht aus um P_{TIME} zu erfassen.

Offene Fragen

- Welche Logik erfasst P_{TIME} (auf der Klasse aller endlichen Strukturen)?
- Gibt es so eine Logik überhaupt?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!